Теоремы умножения и деления характеристических функций обратимого оператора

В. М. БРОДСКИЙ (Одесса, СССР)

Настоящая статья является продолжением работы [1]. Приводимые в ней утверждения без доказательства помещены в заметке [2].

Работа состоит из двух разделов. Первый из них носит вспомогательный характер. В нем вводится определение операторного узла, удобное для исследования обратимых операторов, «близких» к унитарным, и изучаются некоторые свойства таких узлов. Получаемые при этом результаты имеют много общих черт с соответствующими результатами теории узлов, построенной для исследования операторов, «близких» к самосопряженным (см. [3]). Более того, при доказательстве часто используются методы, изложенные в монографии [3].

Во втором разделе доказывается теорема умножения характеристических функций произвольных обратимых операторов. В частном случае, когда дефектный оператор $I-T^*T$ конечномерен, эта теорема в матричной форме была доказана А. В. Кужелем [4]. Для сжатия T (не обязательно обратимого) и характеристической функции, определенной равенством

$$\Theta_T(\zeta)=\left(T-\zeta(I-TT^*)^{\frac{1}{2}}(I-\zeta T^*)^{-1}(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}\right)\Big|\overline{(I-T^*T)\mathfrak{H}},$$

теорема умножения (в более сложной форме) была получена Б. С.-Надем и Ч. Фояшем [5]. А. В. Кужель распространил их результат на случай произвольных линейных ограниченных операторов, но при этом ему пришлось ввести существенные ограничения на инвариантные подпространства [6]. Ранее теоремы такого типа были получены для расширений изометрических операторов М. С. Лившицем и В. П. Потаповым [7] и Ю. Л. Шмульяном [8].

В статье устанавливается также теорема, обратная в некотором смысле теореме умножения характеристических функций.

§ 1. Определение узлов и действий над ними

1. Определение узла. В работе [1] $\mathcal{Y}$-узлом была названа совокупность гильбертовых пространств $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ и операторов $T \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$, $R \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$, $J \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$[1]) таких, что оператор T обратим и

$$I - T^*T = RJR^*, \quad J^* = J, \quad J^2 = I. \tag{1.1}$$

Для определения характеристической функции $\mathcal{Y}$-узла в [1] рассматривался обратимый оператор $K \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, удовлетворяющий условию

$$J - R^*R = K^*JK. \tag{1.2}$$

Для целей настоящей работы необходимо уточнить определение узла включив в него оператор K. Таким образом, *узлом* будем называть в дальнейшем совокупность

$$\Delta = \begin{pmatrix} T & R & J & K \\ \mathfrak{H} & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

гильбертовых пространств $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ и операторов $T \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$, $R \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$, $J \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, $K \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, связанных между собой соотношениями (1.1) и (1.2) и таких, что операторы T и K обратимы.

Оператор T называется *основным* оператором узла Δ. Операция построения по данному обратимому оператору $T \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$ пространства $\mathfrak{G}$ и операторов R, J и K ($K^{-1} \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$), связанных между собой соотношениями (1.1) и (1.2), называется *включением* оператора T в узел. В работах [1, 9] показано, что *любой обратимый оператор T можно включить в некоторый узел.* При этом, *каковы бы ни были пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ и операторы $T \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$ ($T^{-1} \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$), $R \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$, $J \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, удовлетворяющие условиям* (1.1), *всегда найдется обратимый оператор $K \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ такой, что выполняется равенство* (1.2) (см. [1] лемма 1.1 и [9]).

2. Сопряженные узлы. Рассмотрим узел (1.3) и положим $S = TRK^{-1}J$ Очевидно, что

$$SJS^* = TR(K^*JK)^{-1}R^*T^*. \tag{1.4}$$

Умножая обе части равенства $R(I - JR^*R) = (I - RJR^*)R$ слева и справа соответственно на операторы $(I - RJR^*)^{-1} = (T^*T)^{-1}$ и $(I - JR^*R)^{-1} = (K^*JK)^{-1}J$, получим

$$(T^*T)^{-1}RJ = R(K^*JK)^{-1}. \tag{1.5}$$

[1]) Символом $[\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]$, где $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — гильбертовы пространства, обозначается совокупность всех линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$.

На основании (1. 4) и (1. 5)

$$SJS^* = T(T^*T)^{-1}RJR^*T^* = T(T^*T)^{-1}(I-T^*T)T^* = I-TT^*. \tag{1.6}$$

Так как $J-S^*S=J-J(K^*)^{-1}R^*T^*TRK^{-1}J$ и $R^*T^*TR=R^*(I-RJR^*)R=$ $= J-R^*R-(J-R^*R)J(J-R^*R) = K^*JK-K^*JKJK^*JK$, то

$$J-S^*S = KJK^*. \tag{1.7}$$

Ввиду (1. 6) и (1. 7) совокупность

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} T^* & S & J & K^* \\ \mathfrak{H} & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix} \quad (S = TRK^{-1}J)$$

представляет собой узел, который будем называть *сопряженным* по отношению к Δ.

Замечая, что в силу (1. 1) и (1. 2)

$$T^*S(K^*)^{-1}J = T^*TR(K^*JK)^{-1}J = (I-RJR^*)R(J-R^*R)^{-1}J =$$
$$= RJ(J-R^*R)(J-R^*R)^{-1}J = R,$$

приходим к равенству

$$(\Delta^*)^* = \Delta. \tag{1.8}$$

3. Произведение узлов. *Произведением* узлов

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} T_1 & R_1 & J & K_1 \\ \mathfrak{H}_1 & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} T_2 & R_2 & J & K_2 \\ \mathfrak{H}_2 & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

называется совокупность пространств $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2, \mathfrak{G}$ и операторов

$$T = T_1P_1+T_2P_2-T_1R_1K_1^{-1}JR_2^*P_2, \tag{1.10}$$

$$R = R_1+R_2K_1, \quad J, \quad K = K_2K_1, \tag{1.11}$$

где P_j — ортопроекторы на $\mathfrak{H}_j$ ($j=1, 2$). Обозначим эту совокупность символом $\Delta_2\Delta_1$ и заметим, что пространство $\mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно оператора T.

Лемма 1. 1. *Совокупность $\Delta_2\Delta_1$ является узлом.*

Доказательство. Ввиду (1. 10)

$$\begin{aligned} I-T^*T &= I-(T_1^*P_1+T_2^*P_2-R_2S_1^*P_1)(T_1P_1+T_2P_2-S_1R_2^*P_2) = \\ &= I-T_1^*T_1P_1-T_2^*T_2P_2+R_2S_1^*T_1P_1+T_1^*S_1R_2^*P_2-R_2S_1^*S_1R_2^*P_2, \end{aligned} \tag{1.12}$$

где $S_1 = T_1R_1K_1^{-1}J$. Пользуясь равенством (1. 7), получим

$$\begin{aligned} P_2-T_2^*T_2P_2-R_2S_1^*S_1R_2^*P_2 &= R_2JR_2^*P_2-R_2S_1^*S_1R_2P_2 = \\ &= R_2K_1JK_1^*R_2^*P_2. \end{aligned} \tag{1.13}$$

На основании (1. 10)

$$P_2R = R_2K_1, \quad P_1R = R_1, \tag{1.14}$$

и поэтому (1. 13) можно переписать в виде

$$P_2 - T_2^*T_2P_2 - R_2S_1^*S_1R_2^*P_2 = P_2RJR^*P_2. \tag{1.15}$$

Рассмотрим оператор

$$T_1^*S_1R_2^*P_2 = T_1^*T_1R_1K_1^{-1}JR_2^*P_2.$$

В силу (1. 1) и (1. 2)

$$T_1^*S_1R_2^*P_2 = (I - R_1JR_1^*)R_1K_1^{-1}JR_2^*P_2 = R_1J(J - R_1^*R_1)K_1^{-1}JR_2^*P_2 = \\ = R_1JK_1^*R_2^*P_2,$$

откуда, с помощью (1. 14), имеем

$$T_1^*S_1R_2^*P_2 = P_1RJR^*P_2 \quad \text{и} \quad R_2S_1^*T_1P_1 = P_2RJR^*P_1. \tag{1.16}$$

Кроме того,

$$P_1 - T_1^*T_1P_1 = R_1JR_1^* = P_1RJR^*P_1.$$

Пользуясь этой формулой, а также формулами (1. 12), (1. 15) и (1. 16) приходим к выводу, что

$$I - T^*T = P_1RJR^*P_1 + P_2RJR^*P_2 + P_2RJR^*P_1 + P_1RJR^*P_2 = RJR^*. \tag{1.17}$$

Применяя снова равенства (1. 14), будем иметь

$$J - R^*R = J - R^*P_1R - R^*P_2R = J - R_1^*R_1 - K_1^*R_2^*R_2K_1.$$

Так как $J - R_j^*R_j = K_j{}^*JK_j$ $(j=1, 2)$ и $K = K_2K_1$, то

$$J - R^*R = K_1^*JK_1 - K_1^*R_2^*R_2K_1 = K_1^*(J - R_2^*R_2)K_1 = \\ = K_1^*K_2^*JK_2K_1 = K^*JK. \tag{1.18}$$

Утверждение леммы вытекает из (1. 17) и (1. 18).

Лемма 1. 2. *Если узлы*

$$\Delta = \begin{pmatrix} T & R & J & K \\ \mathfrak{H} & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix}, \quad \Delta_j = \begin{pmatrix} T_j & R_j & J & K_j \\ \mathfrak{H}_j & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix} \qquad (j=1, 2) \tag{1.19}$$

таковы, что $\Delta = \Delta_2\Delta_1$, *то* $\Delta^* = \Delta_1^*\Delta_2^*$.

Доказательство. Произведение $\Delta_1^*\Delta_2^*$ является совокупностью пространств $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ и операторов

$$T_1^*P_1 + T_2^*P_2 - T_2^*S_2(K_2^*)^{-1}JS_1^*P_1, \\ S_2 + S_1K_2^*, \quad J, \quad K^* = K_1^*K_2^*, \tag{1.20}$$

где $S_j = T_jR_jK_j{}^{-1}J$ и P_j — ортопроектор на $\mathfrak{H}_j$ $(j=1, 2)$. Ввиду (1. 10)

$$P_2T^*P_1 = -R_2J(K_1^*)^{-1}R_1^*T_1^*P_1.$$

Отсюда и из (1. 1), (1, 2) вытекает, что

$$T_2^* S_2 (K_2^*)^{-1} J S_1^* P_1 = T_2^* T_2 P_2 (K_2^* J K_2)^{-1} (K_1^*)^{-1} R_1^* T_1^* P_1 =$$
$$= (I - R_2 J R_2^*) R_2 (J - R_2^* R_2)^{-1} (K_1^*)^{-1} R_1^* T_1^* P_1 = -P_2 T^* P_1.$$

Следовательно, оператор (1. 20) равен оператору T^*.

Рассмотрим оператор

$$S_2 + S_1 K_2^* = T_2 R_2 K_2^{-1} J + T_1 R_1 K_1^{-1} J K_2^*. \tag{1.21}$$

Поскольку

$$T_1 R_1 K_1^{-1} J K_2^* = T_1 R_1 K_1^{-1} J (K_1^*)^{-1} K_1^* K_2^* = T_1 R_1 (J - R_1^* R_1)^{-1} K^*$$

и $R_1 (J - R_1^* R_1)^{-1} = (I - R_1 J R_1^*)^{-1} R_1 J$, то

$$T_1 R_1 K_1^{-1} J K_2^* = T_1 (T_1^* T_1)^{-1} R_1 J K^* = (T_1^*)^{-1} R J K^*. \tag{1.22}$$

Ввиду (1. 11) $R_2 = P_2 R K_1^{-1}$ и поэтому

$$T_2 R_2 K_2^{-1} J = T_2 R K_1^{-1} K_2^{-1} J = T_2 R K^{-1} J. \tag{1.23}$$

На основании (1. 21), (1. 22) и (1. 23)

$$S_2 + S_1 K_2^* = T_2 R K^{-1} J + (T_1^*)^{-1} R J K^* = (T_2 R + (T_1^*)^{-1} R J K^* J K) K^{-1} J.$$

Принимая во внимание, что

$$(T_1^*)^{-1} R J K^* J K = (T_1^*)^{-1} R J (J - R^* R) = (T_1^*)^{-1} (I - R J R^*) R =$$
$$= (T_1^*)^{-1} T^* T R = \mathcal{P}_1 T R,$$

получим

$$S_2 + S_1 K_2^* = (T_2 R + P_1 T R) K^{-1} J = T R K^{-1} J = S.$$

Лемма доказана.

Узел (1. 3) называется *простым*[2]), если $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\Delta$, где

$$\mathfrak{H}_\Delta = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^n R \mathfrak{G}.^{3)}$$

Если узел (1. 3) не прост, то пространство $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_\Delta$ инвариантно относительно операторов T и T^*, причем T индуцирует в нем унитарный оператор (см. [1]).

Лемма 1. 3. *Если $\Delta = \Delta_2 \Delta_1$ и узел Δ прост, то узлы Δ_1, Δ_2 — также просты.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2. 2 работы [3].

---

[2]) В работе [2] определение простого узла дано в несколько иной форме. Пользуясь результатами работы [1], легко доказать эквивалентность этих определений.

[3]) Символом $\bigvee_{n \in N} \mathfrak{G}_n$, где $\mathfrak{G}_n$ — подмножества из $\mathfrak{G}$, обозначается замыкание линейной оболочки объединения всех $\mathfrak{G}_n (n \in N)$.

4. Проекция узла. В предыдущем пункте по узлам (1.9) был построен узел $\Delta_2\Delta_1$ так, что пространство $\mathfrak{H}_1$ оказалось инвариантным относительно основного оператора узла $\Delta_2\Delta_1$. Рассмотрим обратную задачу. Пусть задан узел

$$\Delta = \begin{pmatrix} T & R & J & K \\ \mathfrak{H} & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix}$$

и пусть $\mathfrak{H}_1$ — инвариантное относительно T подпространство такое, что индуцированный в нем оператор T_1 обратим.

Будем искать узлы

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} T_1 & R_1 & J & K_1 \\ \mathfrak{H}_1 & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} T_2 & R_2 & J & K_2 \\ \mathfrak{H}_2 & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющие условию $\Delta = \Delta_2\Delta_1$. Для этого обозначим через P_1 ортопроектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$, и положим $R_1 = P_1 R$. Заметим, что

$$(1.24) \qquad I - T_1^* T_1 = P_1(I - T^*T)P_1 | \mathfrak{H}_1 = P_1 RJR^* P_1 | \mathfrak{H}_1 = R_1 J R_1^*.$$

На основании леммы 1.1 работы [1] (см. также [9]) найдется обратимый оператор $K_1 \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ такой, что

$$(1.25) \qquad J - R_1^* R_1 = K_1^* J K_1.$$

Определенная таким образом совокупность Δ_1 в силу равенств (1.24) и (1.25) есть узел. Назовем его *проекцией узла Δ на инвариантное подпространство* $\mathfrak{H}_1$ и обозначим символом $\overrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathfrak{H}_1}\Delta}$.

Перейдем к построению узла Δ_2. Пусть $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$, P_2 — ортопроектор на $\mathfrak{H}_2$, $T_2 f = P_2 T f$ $(f \in \mathfrak{H}_2)$ и $R_2 = P_2 R K_1^{-1}$. Тогда

$$R_2 J R_2^* f = P_2 R (K_1^* J K_1)^{-1} R^* P_2 f = P_2 R (J - R_1^* R_1)^{-1} R^* P_2 f =$$
$$= P_2 R (J - R^* P_1 R)^{-1} R^* P_2 f = P_2 (I - RJR^* P_1)^{-1} RJR^* P_2 f \qquad (f \in \mathfrak{H}_2).$$

Легко проверить, что $P_2(I - RJR^*P_1)^{-1} = P_2 - P_2 T^* (T_1^*)^{-1} P_1$. Следовательно,

$$(1.26) \qquad R_2 J R_2^* f = \left(P_2 - P_2 T^* (T_1^*)^{-1} P_1\right)(I - T^*T) P_2 f =$$
$$= P_2 f - P_2 T^* T P_2 f + P_2 T^* P_1 T P_2 f = (I - P_2 T^* P_2 T P_2) f = (I - T_2^* T_2) f.$$

Так как

$$J - R_2^* R_2 = J - (K_1^*)^{-1} R^* P_2 R K_1^{-1} = (K_1^*)^{-1} (K_1^* J K_1 - R^* P_2 R) K_1^{-1}$$

и

$$K_1^* J K_1 - R^* P_2 R = J - R_1^* R_1 - R^* P_2 R = J - R^* P_1 R - R^* P_2 R =$$
$$= J - R^* R = K^* J K,$$

то, полагая $K_2 = KK_1^{-1}$, получим

(1.27) $$J - R_2^* R_2 = (K_1^*)^{-1} K^* JKK_1^{-1} = K_2^* JK_2.$$

Ввиду (1. 26) и (1. 27) совокупность Δ_2 является узлом. *Назовем Δ_2 проекцией узла Δ на ортогональное дополнение $\mathfrak{H}_2$ к инвариантному подпространству* и обозначим символом $\underset{\mathfrak{H}_2}{\overleftarrow{\operatorname{pr}\Delta}}$.

Покажем теперь, что $\Delta = \Delta_2 \Delta_1$. Произведение узлов $\Delta_2 \Delta_1$ было определено как совокупность пространств $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ и операторов

(1.28) $$T_1 P_1 + T_2 P_2 - T_1 R_1 K_1^{-1} J R_2^* P_2,$$
$$R_1 + R_2 K_1, \quad J, \quad K = K_2 K_1.$$

Поскольку $R_2 = P_2 R K_1^{-1}$ и $R_1 = P_1 R$, то

$$T_1 R_1 K_1^{-1} J R_2^* P_2 = T_1 R (K_1^* J K_1)^{-1} R^* P_2 = T_1 R (J - R^* P_1 R)^{-1} R^* P_2 =$$
$$= T_1 (I - RJR^* P_1)^{-1} RJR^* P_2.$$

На основании легко проверяемого равенства $P_1 (I - RJR^* P_1)^{-1} = (T_1^* T_1)^{-1} P_1$ имеем

$$T_1 R K_1^{-1} J K_2^* P_2 = (T_1^*)^{-1} (I - T^* T) P_1 = -P_1 T P_2.$$

Отсюда вытекает, что оператор (1. 28) равен T. Кроме того,

$$R_1 + R_2 K_1 = P_1 R + P_2 R = R,$$

и, следовательно, $\Delta = \Delta_2 \Delta_1$.

Таким образом, доказана.

Теорема 1. 1. *Если T — обратимый оператор из $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$, обладающий инвариантным подпространством $\mathfrak{H}_1$, в котором индуцируется обратимый оператор, то существуют узлы*

$$\Delta = \begin{pmatrix} T & R & J & K \\ \mathfrak{H} & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix},$$

$\Delta_1 = \underset{\mathfrak{H}_1}{\overrightarrow{\operatorname{pr}\Delta}}$ *и* $\Delta_2 = \underset{\mathfrak{H}_2}{\overleftarrow{\operatorname{pr}\Delta}}$ $(\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1)$, *такие что* $\Delta = \Delta_2 \Delta_1$.

Кроме того, отметим следующее очевидное утверждение: *для любых узлов Δ, Δ_1, Δ_2, связанных между собой равенством $\Delta = \Delta_2 \Delta_1$, справедливы формулы $\Delta_1 = \underset{\mathfrak{H}_1}{\overrightarrow{\operatorname{pr}\Delta}}$, $\Delta_2 = \underset{\mathfrak{H}_2}{\overleftarrow{\operatorname{pr}\Delta}}$.*

Понятие проекций узла

$$\Delta = \begin{pmatrix} T & R & J & K \\ \mathfrak{H} & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix}$$

введено так, что данному инвариантному подпространству $\mathfrak{H}_1$ оператора T отвечает бесконечное множество проекций на $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$. Если

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} T_1 & R_1 & J & K_1 \\ \mathfrak{H}_1 & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix} = \underset{\mathfrak{H}_1}{\overrightarrow{\operatorname{pr}\Delta}} \quad \text{и} \quad \Delta_1' = \begin{pmatrix} T_1' & R_1' & J & K_1' \\ \mathfrak{H}_1 & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix} = \underset{\mathfrak{H}_1}{\overrightarrow{\operatorname{pr}\Delta}},$$

то $T_1 = T_1'$, $R_1 = R_1'$, и существует J-изометрический оператор $U \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ такой, что $K_1 = UK_1'$. Если, кроме того,

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} T_2 & R_2 & J & K_2 \\ \mathfrak{H}_2 & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix} = \underset{\mathfrak{H}_2}{\overleftarrow{\operatorname{pr} \Delta}}, \quad \Delta_2' = \begin{pmatrix} T_2' & R_2' & J & K_2' \\ \mathfrak{H}_2 & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix} = \underset{\mathfrak{H}_2}{\overleftarrow{\operatorname{pr} \Delta}}$$

и $\Delta = \Delta_2 \Delta_1 = \Delta_2' \Delta_1'$, то $T_2 = T_2'$, $R_2 = R_2' JU^* J$, $K_2 = K_2' JU^* J$.

§ 2. Исследование узла с помощью характеристической функции

1. Теорема умножения. В работах [1, 9] каждому узлу $\mathscr{Y} = (\mathfrak{H}, \mathfrak{G}; T, R, J)$ была поставлена в соответствие характеристическая функция (Θ-функция)

$$\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta) = J(K^*)^{-1}(J - R^*(I - \zeta T^*)^{-1} R) \qquad (\zeta \bar{\in} \sigma[(T^*)^{-1}]),^4)$$

где K-некоторый оператор из $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, удовлетворяющий условию

$$J - R^* R = K^* K. \tag{2.1}$$

Поскольку условием (2. 1) оператор K определен лишь с точностью до левого J-унитарного множителя, то каждому $\mathscr{Y}$-узлу отвечает бесконечное множество Θ-функций. Включение оператора K в узел позволяет установить взаимно однозначное соответствие между узлами и их Θ-функциями.

Итак, *характеристической функцией* (Θ-*функцией*) *узла*

$$\Delta = \begin{pmatrix} T & R & J & K \\ \mathfrak{H} & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

называется оператор-функция

$$\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta) = J(K^*)^{-1}(J - R^*(I - \zeta T^*)^{-1} R) \qquad (\zeta \bar{\in} \sigma[(T^*)^{-1}]). \tag{2.3}$$

Теорема 2. 1. *Если узлы*

$$\Delta = \begin{pmatrix} T & R & J & K \\ \mathfrak{H} & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix}, \quad \Delta_j = \begin{pmatrix} T_j & R_j & J & K_j \\ \mathfrak{H}_j & & & \mathfrak{G} \end{pmatrix} \qquad (j = 1, 2) \tag{2.4}$$

таковы, что $\Delta = \Delta_2 \Delta_1$, *то*

$$\Theta_\Delta(\zeta) = \Theta_{\Delta_2}(\zeta) \Theta_{\Delta_1}(\zeta) \qquad (\zeta \bar{\in} \sigma[(T_1^*)^{-1}] \cup \sigma[(T_2^*)^{-1}]). \tag{2.5}$$

Доказательство.[5]) Обозначим через P_j ортопроектор на $\mathfrak{H}_j$ $(j = 1, 2)$. Как известно,

$$(I - \zeta T^*)^{-1} = P_1 (I - \zeta T_1^*)^{-1} P_1 + P_2 (I - \zeta T_2^*)^{-1} P_2 + \\ + \zeta P_2 (I - \zeta T_2^*)^{-1} P_2 T^* P_1 (I - \zeta T_1^*)^{-1} P_1.$$

[4]) Символом $\sigma(A)$, где $A \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$, обозначают спектр оператора A.

[5]) При доказательстве теоремы 2.1 обобщаются на бесконечномерный случай некоторые рассуждения А. В. Кужеля [4].

Следовательно,

$$(2.6)\qquad \Theta_\Delta(\zeta) = J(K^*)^{-1}\big(J-R^*P_1(I-\zeta T_1^*)^{-1}P_1R\big)- \\ -J(K^*)^{-1}\big(R^*P_2(I-\zeta T_2^*)^{-1}P_2R+A(\zeta)\big),$$

где $A(\zeta) = \zeta R^*P_2(I-\zeta T_2^*)^{-1}P_2T^*P_1(I-\zeta T_1^*)^{-1}P_1R$.

В силу (1. 11)

$$(2.7)\qquad P_1R=R_1,\quad P_2R=R_2K_1.$$

Отсюда вытекает, что

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} J-R^*P_1(I-\zeta T_1^*)^{-1}P_1R &= J-R_1^*(I-\zeta T_1^*)^{-1}R_1 = K_1^*J\Theta_{\Delta_1}(\zeta),\\ R^*P_2(I-\zeta T_2^*)^{-1}P_2R &= K_1^*R_2^*(I-\zeta T_2^*)^{-1}R_2K_1 = K_1^*\big(J-K_2^*J\Theta_{\Delta_2}(\zeta)\big)K_1. \end{aligned}$$

На основании (1. 10)

$$(2.9)\qquad P_2T^*P_1 = -R_2J(K_1^*)^{-1}R_1^*T_1^*.$$

Так как $\zeta T_1^*(I-\zeta T_1^*)^{-1} = (I-\zeta T_1^*)^{-1}-I$ и $R_1^*R_1 = J-K_1^*JK_1$, то

$$(2.10)\qquad R_1^*\zeta T_1^*(I-\zeta T_1^*)^{-1}R_1 = R_1^*(I-\zeta T_1^*)^{-1}R_1-R_1^*R_1 = K_1^*JK_1-K_1^*J\Theta_{\Delta_1}(\zeta).$$

Пользуясь формулами (2. 7), (2. 9) и (2. 10), получим

$$(2.11)\qquad A(\zeta) = -K_1^*R_2^*(J-\zeta T_2^*)^{-1}R_2J(K_1^*)^{-1}R_1^*\zeta T_1^*(I-\zeta T_1^*)^{-1}R_1 = \\ = -K_1^*\big(J-K_2^*J\Theta_{\Delta_2}(\zeta)\big)\big(K_1-\Theta_{\Delta_1}(\zeta)\big).$$

Ввиду соотношений (2. 6), (2. 8) и (2. 9)

$$\Theta_\Delta(\zeta) = J(K^*)^{-1}K_1^*J\Theta_{\Delta_1}(\zeta)-J(K^*)^{-1}\big[K_1^*\big(J-K_2^*J\Theta_{\Delta_2}(\zeta)\big)K_1- \\ -K_1^*\big(J-K_2^*J\Theta_{\Delta_2}(\zeta)\big)\big(K_1-\Theta_{\Delta_1}(\zeta)\big)\big].$$

Производя в последнем равенстве элементарные алгебраические преобразования и замечая, что $K=K_2K_1$, придем к утверждению теоремы.

Из теорем 2. 1 и 1. 1 следует

Теорема 2. 2. *Пусть T — обратимый оператор из $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$, $\mathfrak{H}_1$ — инвариантное относительно T подпространство такое, что в нем индуцируется обратимый оператор T_1, P_1 — ортопроектор на $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}_1$, $P_2 = I-P_1$, $T_2f=P_2Tf$ $(f\in\mathfrak{H}_2)$ и Δ — некоторый узел с основным оператором T.*

Тогда найдутся узлы Δ_1 и Δ_2 с основными операторами T_1 и T_2 соответственно такие, что

$$\Theta_\Delta(\zeta) = \Theta_{\Delta_2}(\zeta)\Theta_{\Delta_1}(\zeta)\qquad \big(\zeta\,\overline{\in}\,\sigma[(T_1^*)^{-1}]\cup\sigma[(T_2^*)^{-1}]\big).$$

2. Теорема деления. Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторое гильбертово пространство и $J\in[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ — сигнатурный оператор ($J^2=I$, $J^*=J$). В работах [1, 9] через $\mathfrak{A}(I)$ был обозначен класс всех оператор-функции $\Theta(\zeta)$ со значениями из $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, удовлетворяющих следующим условиям:

I. $\Theta(\zeta)$ определена и голоморфна в некоторой окрестности точки $\zeta=0$;

II. оператор $\Theta(0)$ является обратимым двусторонним J-сжатием $(\Theta^*(0)J\Theta(0)\leqq J,\ \Theta(0)J\Theta^*(0)\leqq J)$;

III. оператор-функция

$$\Omega(\zeta)=J(I-U_0^{-1}\Theta(\zeta))(I+U_0^{-1}\Theta(\zeta))^{-1},$$

где оператор U_0 взят из J-полярного представления

$$\Theta(0)=U_0H_0 \qquad (U_0^*JU_0=U_0JU_0^*=J,\ (JH_0)^*=JH_0,\ \sigma(H_0)\subset(0,\infty)),$$

допускает аналитическое продолжение на весь круг $|\zeta|<1$, которое удовлетворяет неравенству $\Omega(\zeta)+\Omega^*(\zeta)\geqq 0$ $(|\zeta|<1)$.

Кроме того, в работе [1] было доказано, что все Θ-функции принадлежат соответствующим классам $\mathfrak{A}(J)$ и наоборот, для каждой функции $\Theta(\zeta)\in\mathfrak{A}(J)$ найдется простой узел $\Delta=\begin{pmatrix}T & R & J & K\\ \mathfrak{H} & & & \mathfrak{G}\end{pmatrix}$ такой, что в некоторой окрестности точки $\zeta=0$ выполняется равенство $\Theta(\zeta)=\Theta_\Delta(\zeta)$.

Функцию $\Theta_1(\zeta)\in\mathfrak{A}(J)$ назовем *делителем* функции $\Theta_2(\zeta)\in\mathfrak{A}(J)$, если существует функция $\Theta_{21}(\zeta)\in\mathfrak{A}(J)$ такая, что $\Theta_2(\zeta)=\Theta_{21}(\zeta)\Theta_1(\zeta)$. Если, кроме того, произведение простых узлов, отвечающих соответственно функциям $\Theta_1(\zeta)$ и $\Theta_{21}(\zeta)$, также является простым узлом, то функция $\Theta_1(\zeta)$ называется *правильным делителем* функции $\Theta_2(\zeta)$. С помощью понятия унитарной эквивалентности узлов (см. [1, 2]) легко доказывается корректность этого определения.

Включим обратимый оператор $T\in[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$ в простой узел $\Delta=\begin{pmatrix}T & R & J & K\\ \mathfrak{H} & & & \mathfrak{G}\end{pmatrix}$ и пусть $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — такие инвариантные подпространства оператора T, что в них индуцируются обратимые операторы. Положим $\Delta_1=\underset{\mathfrak{H}_1}{\mathrm{pr}}\,\vec{\Delta}$, $\Delta_2=\underset{\mathfrak{H}_2}{\mathrm{pr}}\,\vec{\Delta}$.

Теорема 2.3. *Для того чтобы $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{H}_2$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Theta_{\Delta_1}(\zeta)$ была правильным делителем функции $\Theta_{\Delta_2}(\zeta)$. При этом $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}_2$ тогда и только тогда, когда существует J-унитарный оператор $U\in[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ такой, что $\Theta_{\Delta_1}(\zeta)=U\Theta_{\Delta_2}(\zeta)$.*[6])

Доказательво аналогично доказательству теоремы 5.6 работы [3].

В заключение отметим, что, как будет показано в статье [10], теория узлов и их характеристических функций допускает дальнейшее обобщение, при котором будет снято требование обратимости основного оператора.

[6]) Оператор U принадлежит классу $\mathfrak{A}(J)$ и является характеристической функцией зула $\Delta_0=\begin{pmatrix}T_0 & R_0 & J & K_3\\ \mathfrak{H}_0 & & & \mathfrak{G}\end{pmatrix}$, где $\mathfrak{H}_0=\{0\}$, $R_0g=0$ $(g\in\mathfrak{G})$ и $K_0=U$.

Цитированная литература

[1] В. М. Бродский, И. Ц. Гохбергии, М. Г. Крейн, О характеристических функциях обратимого оператора, *Acta Sci. Math*, **32** (1971), 129—152.

[2] В. М. Бродский, Некоторые теоремы об узлах и их характеристических функциях, *Функц. анализ и его прил.*, **4**: 2 (1970).

[3] М. С. Бродский, *Треугольные и жордановые представлния линейных операторов* (Москва, 1969).

[4] А. В. Кужель, Теорема умножения характеристических матриц-функций неунитарных операторов, *Научные доклады высшей школы, Физ.-мат. науки*, **3** (1959).

[5] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (Budapest—Paris, 1967).

[6] А. В. Кужель, Обобщение теоремы Надя—Фояша о факторизации характеристических оператор-функций, *Acta Sci. Math.*, **30** (1969), 225—233.

[7] М. С. Лившиц и В. П. Потапов, Теорема умножения характеристических матриц-функций, *ДАН*, **62** (1950), 625—628.

[8] Ю. Л. Шмульян, Операторы с вырожденной характеристической функцией, *ДАН*, **93** (1953), 985—988.

[9] В. М. Бродский, И. Ц. Гохберги, М. Г. Крейн, Определение и свойства характеристических функций $\mathcal{U}$-узла, *Функ. анализ и его прил.*, **4**: 1 (1970), 88—90.

[10] В. М. Бродский, Об операторных узлах и их характеристических функциях, *ДАН* (в печати).

(Поступило 11/V/1970 г.)